

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

Обнинский институт атомной энергетики –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)

ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

Одобрено на заседании
Ученого совета ИАТЭ
НИЯУ МИФИ
Протокол от 24.04.2023 №23.4

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Математический анализ

название дисциплины

для направления подготовки

14.03.01 Ядерная энергетика и теплофизика

код и направления подготовки

образовательная программа

Монтаж, наладка и ремонт оборудования АЭС

Форма обучения: очная

г. Обнинск 2023 г.

1. Цели и задачи дисциплины:

Дисциплина «Математический анализ» является одной из основных фундаментальных учебных дисциплин; она обеспечивает подготовку специалистов к успешному освоению дисциплин естественнонаучного и профессионального циклов.

Цель изучения дисциплины «Математический анализ» - теоретическая подготовка и получение практических навыков по высшей математике для успешного усвоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана, а также для возможности изучения специальной литературы, в случае необходимости самостоятельного углубления математических знаний после окончания ВУЗа. Развить логическое мышление студентов, привить потребность теоретического обоснования различных явлений.

В ходе изучения дисциплины «Математический анализ» решаются следующие задачи:

1. Создание у студентов достаточно широкой подготовки в области математики и воспитание достаточно высокой математической культуры.
2. Сформировать у бакалавров навыки использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.
3. Привитие навыков самостоятельной работы с литературой по математике и ее приложениям.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Математический анализ» входит в учебный план подготовки бакалавра по направлению **14.03.01 «Ядерная энергетика и теплофизика» профиль "Монтаж, наладка и ремонт оборудования АЭС"** и относится к дисциплинам базовой части профессионального цикла. Изучение дисциплины базируется на знаниях и навыках, полученных в результате изучения школьной программы по алгебре, анализу и геометрии. Дисциплина «Математический анализ» является одной из основ для изучения дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Уравнения математической физики».

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Код компетенции	Наименование компетенции
ОПК-2	Способность демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовность использовать основные законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные методы дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, основные понятия и методы дифференциального исчисления функций нескольких переменных, теорию числовых и функциональных рядов.

Уметь: применять математические методы, модели и законы для решения практических задач.

Владеть: математическим аппаратом и навыками использования современных подходов и методов математики к описанию, анализу, теоретическому и экспериментальному исследованию, моделированию природных явлений и процессов в объеме, необходимом для использования в обучении и профессиональной деятельности.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 12 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2		
Аудиторные занятия (всего)	192				
<i>В том числе:</i>	-	-	-	-	-
Лекции	96	48	48		
Практические занятия/ Семинары	96	48	48		
Лабораторные работы					
<i>В том числе:</i>	-	-	-	-	-
интерактивные формы обучения (лекции)					
Самостоятельная работа (всего)	150	66	84		
<i>В том числе:</i>	-	-	-	-	-
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Индивидуальное домашнее задание	16	12	4		
Подготовка к практическим занятиям	26	18	8		
Вид промежуточной аттестации экзамен	90	54	36		
ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ	432ч.	168ч.	192ч.		

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
-------	---------------------------------	--------------------

1.	Дифференциальные уравнения	*	*	*	*	*	*	*
2.	Комплексный анализ	*	*	*	*	*		*
3.	Теория вероятностей и математическая статистика			*	*	*	*	*
4.	Функциональный анализ	*	*	*	*	*	*	*
5.	Уравнения математической физики	*	*	*	*	*	*	*

3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции и	Практ. занят.	Лабор. занят.	Семинары	СРС	Всего час.
1.	Элементы функций комплексного переменного	2	4			2	8
2.	Пределы последовательностей и функций	18	16			10	44
3.	Дифференциальное исчисление	23	24			12	59
4.	Интегральное исчисление	8	7			6	21
5.	Интегральное исчисление (Определенные интегралы и их приложения)	24	24			6	54
6.	Функции нескольких переменных	16	16			3	35
7.	Числовые и функциональные ряды	14	14			3	31

6. Распределение часов по темам и видам учебных занятий для бакалавров очной формы обучения.

Таблица распределения часов по темам и видам учебных занятий для бакалавров очной формы обучения

Общая трудоемкость учебной дисциплины 12 зачетных единиц, что составляет 432 часов.

Раздел, тема программы учебной дисциплины	Трудоемкость (час)	
	Всего	в том числе по видам учебных занятий

		лекции	семинары, практические занятия
1	2	3	4
Раздел 1. Элементы функций комплексной переменной	6	2	4
Тема 1.1 Арифметика комплексных чисел.	3	1	2
Тема 1.2. Элементарные функции комплексного переменного.	3	1	2
Раздел 2. Пределы последовательностей и функций	34	18	16
Тема 2.1. Элементы теории действительных чисел.	4	2	2
Тема 2.2. Пределы числовых последовательностей.	12	6	6
Тема 2.3. Пределы функций. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на отрезке.	18	10	8
Раздел 3. Дифференциальное исчисление	47	23	24
Тема 3.1. Производная и дифференциал функции.	14	6	8
Тема 3.2. Основные теоремы дифференциального исчисления.	12	6	6
Тема 3.3. Формула Тейлора.	8	6	2
Тема 3.4. Применение дифференциального исчисления.	13	5	8
Раздел 4. Интегральное исчисление	15	8	7
Тема 4.1. Первообразная функции. Неопределённый интеграл.	7	4	3
Тема 4.2. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений.	8	4	4
Раздел 5. Интегральное исчисление (определённые интегралы и их приложения)	48	24	24
Тема 5.1. Определённый интеграл Римана.	20	10	10
Тема 5.2. Приложения определённых интегралов.	18	8	10
Тема 5.3. Несобственные интегралы.	10	6	4

Раздел 6. Функции нескольких переменных.	32	16	16
Тема 6.1. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.	4	2	2
Тема 6.2. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных.	4	2	2
Тема 6.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Локальный экстремум функций нескольких переменных.	12	6	6
Тема 6.4. Неявная функция. Условный экстремум.	12	6	6
Раздел 7. Числовые и функциональные ряды	28	14	14
Тема 7.1. Числовые ряды. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная сходимость.	12	6	6
Тема 7.2. Степенные ряды. Ряды Тейлора.	8	4	4
Тема 7.3. Ряды Фурье.	8	4	4
Итого часов	432	96	96
<i>Аудиторных часов</i>	<i>192</i>	Формы рубежного (итогового) контроля знаний бакалавров: очной формы обучения – экзамен	
<i>Внеаудиторная самостоятельная работа</i>	<i>150</i>		
<i>Количество часов на подготовку к зачету/экзамену</i>	<i>90</i>		
<i>Всего часов на освоение учебного материала</i>	<i>432</i>		

7. Содержание тем программы учебной дисциплины.

Первый семестр

Раздел 1. Элементы функций комплексной переменной [1,5,8]

Тема 1. Комплексные числа. Арифметика комплексных чисел. Геометрический смысл. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел. *Литература: 1,5,8*

Тема 2. Элементарные функции комплексного переменного: возведение в целую степень и извлечение корня. *Литература: 1,5,8*

Раздел 2. Пределы последовательностей и функций.

Тема 3. Элементы теории действительных чисел. Свойства действительных чисел. Теорема о существовании верхней (нижней) грани.

Литература: 1,5,8

Тема 4. Пределы числовых последовательностей. Числовая последовательность, предел последовательности. Свойства бесконечно малых последовательностей. Свойства сходящихся последовательностей. Предел монотонной последовательности. Число e . Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности: частичные пределы, предельные точки, верхний и нижний пределы. Принцип вложенных отрезков. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши. *Литература: 1,5,8*

Тема 5. Пределы функций. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Понятие функции. Область определения и множество значений функции. Сложная функция и обратная функция. График функции. Предел функции. Два определения предела, их эквивалентность. Свойства функций, имеющих пределы. Расширение понятия предела: односторонние пределы, бесконечные пределы и пределы на бесконечности. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно большие и бесконечно малые функции. Шкала сравнений. О- и о-символика. Свойства функций, непрерывных в точке. Классификация точек разрыва. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Равномерная непрерывность. Теоремы Вейерштрасса и Кантора. *Литература: 1,5,8*

Раздел 3. Дифференциальное исчисление.

Тема 6. Производная и дифференциал функции. Понятие производной, её механический и геометрический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику. Дифференцируемость, дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования суммы, произведения, частного. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Инвариантность формы 1 дифференциала. Производные и дифференциалы старших порядков. *Литература: 1,5,8*

Тема 7. Основные теоремы дифференциального исчисления: Теоремы Ферма, Лагранжа, Коши. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталья. *Литература: 1,5,8*

Тема 8. Формула Тейлора. Формулы Тейлора с остаточными членами в формах Лагранжа и Пеано. Основные разложения (формулы Маклорена)

Литература: 1,5,8

Тема 9. Применение дифференциального исчисления. Исследование функций: монотонность, экстремумы, выпуклость графика, приближённые вычисления, построение графиков. *Литература: 1,5,8*

Раздел 4. Интегральное исчисление

Тема 10. Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Теорема о первообразных. Определение неопределённого интеграла и его простейшие свойства. Замена переменных. Интегрирование по частям. *Литература: 1,5,8*

Тема 11. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений. Алгебраические многочлены и рациональные функции (дроби). Разложение дроби в сумму простейших. Методы нахождения неопределённых коэффициентов. Интегрирование

рациональных функций. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений. Подстановки Эйлера. Биномиальные дифференциалы.

Литература: 1,5,8

Второй семестр

Раздел 5. Интегральное исчисление (определенные интегралы и их приложения)

Тема 12. Определённый интеграл Римана. Интегральная сумма, ее предел, определение интеграла Римана. Неинтегрируемость неограниченной функции. Суммы Дарбу и их свойства. Интеграл Дарбу. Критерий интегрируемости. Основные классы интегрируемых функций. Основные свойства определённого интеграла: линейность, аддитивность как функции множества. Свойства, выраженные неравенствами. Теоремы о среднем. Определённый интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона- Лейбница и следствия из неё.

Литература: 1,5,8

Тема 13. Приложения определенных интегралов. Длина кривой. Кривые: простые кривые, гладкие кривые. Спрямолинейность. Длина дуги. Формулы для нахождения длины. Дифференциал дуги. Векторное уравнение кривой. Кривизна. Площадь плоской фигуры. Понятие квадратуемости. Площадь. Свойства площади. Площадь криволинейной трапеции. Объём тела. Объём тела вращения. Другие геометрические и физические приложения определённых интегралов.

Литература: 1,5,8

Тема 14. Несобственные интегралы. Определение, критерий сходимости. Простейшие свойства несобственных интегралов. Сходимость и абсолютная сходимость. Сходимость интегралов от неотрицательных функций. Признаки сходимости. Сходимость абсолютная и условная. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

Литература: 1,5,8

Раздел 6. Функции нескольких переменных .

Тема 15. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Множества точек в метрическом пространстве: открытость, ограниченность, связность, внутренние точки, предельные точки, граница. Последовательности точек в конечномерном пространстве и их свойства. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Литература: 1,6,8

Тема 16. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Дифференцируемость. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы 1-го дифференциала. Достаточные условия дифференцируемости. *Литература: 1,6,8*

Тема 17. Частные производные и дифференциала высших порядков. Равенство смешанных производных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Локальный экстремум функций нескольких переменных. Необходимые условия. Достаточные условия.

Литература: 1,6,8

Тема 18. Неявная функция. Условный экстремум. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявной функции. Вычисление производных неявной функции. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений. Матрицы Якоби, якобианы, их свойства. Зависимость функций. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Достаточные условия.

Литература: 1,6,8

Раздел 7. Числовые и функциональные ряды

Тема 19. Числовые и функциональные ряды и последовательности. Числовой ряд, сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши. Сходимость и абсолютная сходимость. Знакопостоянные ряды, критерий сходимости. Признаки сходимости: признак сравнения, признаки Коши и Даламбера, интегральный признак Коши. Условная сходимость. Признаки сходимости знакопеременных рядов: признак Лейбница, признаки Дирихле и Абеля. Свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Поточечная и равномерная сходимости. Критерии и признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы равномерно сходящегося ряда.

Литература: 1,5,8

Тема 20. Степенные ряды. Круг (интервал) сходимости. Формулы Коши-Адамара и Даламбера для радиуса сходимости степенного ряда. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Ряды Тейлора, теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Ряды Маклорена для известных функций: вид, область сходимости.

Литература: 1,5,8

Тема 21. Ряды Фурье. Тригонометрическая ортогональная система функций, ряд Фурье, теоремы о коэффициентах ряда и условиях сходимости ряда Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Литература: 1,5,8

8. Учебные мероприятия текущего и промежуточного контроля знаний бакалавров.

Первый семестр

Тема программы учебной дисциплины	Учебные мероприятия текущего и промежуточного контроля знаний	Недел я
Разделы 1-2. Комплексные числа. Пределы последовательностей и функций. Непрерывность функции в точке и на отрезке.	Контрольная работа № 1	7
	Коллоквиум	11
	Индивидуальное домашнее задание. [4]: «Пределы».	8
Раздел 3. Производная и дифференциал функции.	Контрольная работа № 2	15

Основные теоремы дифференциального исчисления. Формула Тейлора. Применение дифференциального исчисления.	Коллоквиум	11
	Индивидуальное домашнее задание [4]: «Производная», «графики функций с полным исследованием».	15

Второй семестр

Тема программы учебной дисциплины	Учебные мероприятия текущего и промежуточного контроля знаний	Неделя
Разделы 4-5. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Приложения.	Контрольная работа № 1	6
	Индивидуальное домашнее задание. [4]: «Интегралы»	8
Раздел 6. Функции нескольких переменных.	Контрольная работа № 2	11
Раздел 7. Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды.	Контрольная работа № 2	16
	Индивидуальное домашнее задание [4]: «Ряды».	

9. Самостоятельная работа бакалавра в аудитории под контролем преподавателя Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практического занятия/семинара	Форма проведения занятий	Трудоемкость (час.)
1.	1.	Комплексные числа. [8], гл.1.	- решение задач	2
2.	2.	Графики основных элементарных функций. Методы построения графиков функций. [3].№124-150, [7] отд. 1, §3-4.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - решение задач	2
2.	2.	Предел последовательности. [3]№245-261, [7]отд. 1, §2.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - решение задач	6
3.	2.	Предел функции [3]№268-350, 360-414, [7] отд. 1, §5-6.	- проверка правильности выполнения домашнего задания	8

			- решение задач	
4.	2	Непрерывность функций. Классификация точек разрыва. [3]№221-240, [7]отд. 1, §7.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - решение задач	2
5.	3	Производная и дифференциал. Дифференцирование неявно заданной, обратной, параметрически заданной функции. [3]№466-770, 792-809, 889-906, 936-945, [7]отд. 2, §1-4.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	8
6.	3	Повторное дифференцирование. [3]№1006-1040, 1056-1088, [7]отд. 2, §5.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	2
7.	3	Исследование функций. Монотонность, выпуклость, вогнутость, экстремумы, точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Касательная и нормаль. Построение графика функции с полным исследованием. [3]№1156-1191, 1271-1300, 825-864, 1406-1425, [7]отд. 2, §7, 8, 11-14	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	10
8.	3	Правило Лопиталья, формула Тейлора. [3]№1324-1363, [7]№1318-1356, 1376-1386, 1396-1406	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	4
9.	4	Неопределенный интеграл. Простейшие методы интегрирования: табличные интегралы, формула замены переменной и интегрирование по частям. [3] гл.5, [7]№1628-1747, 1791-1824	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	7
10.	5	Неопределённый интеграл. Основные приёмы и методы вычисления. [7] № 1926-1932, 1943-1948, 1981-1987, 1991-2007, 2025-2036	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	8
11.	5	Определенные интегралы. Приложения. [7] № 2231-2243, 2455-2662.	- проверка правильности выполнения домашнего задания	12

		[3] № 2185-2333, 2397-2500.	- систематизация учебного материала - решение задач	
12.	5	Несобственные интегралы. [7] № 2366-2454. [3] № 2334-2395	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	4
13.	6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Предел, непрерывность, частные производные, дифференциал, дифференцирование сложной, неявно заданной функции, повторное дифференцирование. [7] № 2952-3241. [3] № 3136-3580.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	8
14.	6	Формула Тейлора, экстремумы, условные экстремумы. [7] № 3242-3322. [3] № 3581-3680.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач	8
15.	7	Числовые ряды. [7] № 2727-2801. [3] № 2546-2697.	- систематизация учебного материала - решение задач	6
16.	7	Функциональные ряды. Область сходимости. Интегрирование и дифференцирование рядов. Степенные ряды. [7] № 2802-2840, 2851-2858. [3] № 2716-2782.	- проверка правильности выполнения домашнего задания - систематизация учебного материала - решение задач - контрольная работа	6
17.	7	Ряды Фурье. [7] № 2939-2951	- систематизация учебного материала - решение задач	2

Лабораторный практикум не предусмотрен

10. Примерная тематика для курсового проектирования (для выполнения курсовых работ), рефератов и учебных научно-исследовательских работ. Методические рекомендации к их выполнению

Индивидуальные домашние задания

1 семестр

Тема	Литература
Графики основных элементарных функций. Методы построения графиков функций.	[4] раздел 1, задачи 1 – 4 [3] глава 1, §3-5
Предел функции.	[7] отд. 1, § 5-6; [3] гл. 2.

Непрерывность функций. Классификация точек разрыва.	[7], отд. 1, § 7; [3] гл. 2.
Производная и дифференциал. Дифференцирование неявно заданной, обратной, параметрически заданной функции.	[4], раздел 2, задачи 5-13 [3], гл.2
Повторное дифференцирование.	[4], раздел 2, задачи 17-19 [3], гл.2
Исследование функций. Монотонность, выпуклость, вогнутость, экстремумы, точки перегиба. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Касательная и нормаль. Кривизна.	[4], раздел 3, задачи 1-10 [3], гл. 4
Правило Лопиталя, формула Тейлора.	[7], отд. 2, § 10; [3] гл. 4, § 5.
Неопределенный интеграл. Основные приемы и способы интегрирования.	[4], раздел 4, задачи 1-7 [3], гл. 6

2 семестр.

Тема	Литература
Определенные интегралы. Приложения.	[4], раздел 4, задачи 8-11
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Предел, непрерывность, частные производные, дифференциал, дифференцирование сложной, неявно заданной функции, повторное дифференцирование.	[3], задачи 3136-3580. [7], задачи 3000-3100
Формула Тейлора, экстремумы, условные экстремумы.	[7] № 3242-3322. [3] №3581-3680.
Числовые ряды. Функциональные ряды. Сходимость. Интегрирование и дифференцирование рядов. Степенные ряды.	[4] раздел 6, задачи 1-14.

11. Примеры тестовых заданий (контрольных вопросов) для оценки качества освоения дисциплины, уровня учебных достижений**Варианты контрольных работ****1 семестр****Промежуточная контрольная работа 1 (графики)****Вариант 1**

1. Применяя правило сложения графиков, построить $y = x + \arctg x$.
2. Построить графики $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$, $y = \frac{1}{x^2 + 9}$, $y = \text{cth}(|x| - 1)$, $y = \arcsin^2(2x - 1)$.

Вариант 2

1. Применяя правило сложения графиков, построить $y = x + \sin x$.
2. Построить графики $y = \lg(x^2 - x - 2)$, $y = \frac{x}{4 - x^2}$, $y = \text{sh}(|x - 1|)$, $y = \arcsin(\sin 2x)$.

Вариант 3

1. Применяя правило сложения графиков, построить $y = x + e^x$.

2. Построить графики $y = \lg(x^2 + 3x + 2)$, $y = \frac{x}{4 + x^2}$, $y = \operatorname{ch}(|x| - 1)$, $y = \arcsin(x^2 - 1)$.

Рейтинговая контрольная работа 1 (1 семестр).

Тема: комплексные числа, пределы

Вариант 1.

1. Построить график функции $f(x) = 1 - \sqrt[3]{4 - x}$ (2 балла).
2. Вычислить $\frac{(3 - 2i)}{(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})} + 2i - 3$ (2 балла).
3. Вычислить все значения корня $\sqrt{-\sqrt{3} - 3i}$ и изобразить их на комплексной плоскости (3 балла).
4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 9} + \sqrt[3]{8n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^5 + 2}}$ (2 балла).
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$ (3 балла).
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}$ (2 балла).
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}^2(x + 1)}{\cos \pi x + \cos 2\pi x}$ (3 балла).
8. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n \cos n}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 4} \right)$ (3 балла).

Вариант 2.

1. Построить график функции $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}(2 - x) + 2$ (2 балла).
2. Вычислить $\frac{(3 - i)^2}{-1 + i} + 5 - 4i$ (2 балла).
3. Вычислить все значения корня $\sqrt[3]{-1 + i}$ и изобразить их на комплексной плоскости (3 балла).
4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 5} - \sqrt{n^2 + 3n + 1}}{\sqrt{4n^4 + 2} + \sqrt[4]{n^3 + 1}}$ (2 балла).
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^3 + 8}$ (3 балла).
6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 1})$ (2 балла).
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$ (3 балла).
8. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + (-3)^n}{3^{n-1} + 7^{n+1}}$ (3 балла).

Вариант 3.

1. Построить график функции $f(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi x) - 2$ (2 балла).
2. Вычислить $\frac{(1 - i)^3}{(2 + i)^2}$ (2 балла).
3. Вычислить все значения корня $\sqrt[4]{-16}$ и изобразить их на комплексной плоскости (3 балла).

4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{7n^6 + 1} - \sqrt{n^3 + 3}}{\sqrt{n^4 + 2 + n}}$ (2 балла).
5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$ (3 балла).
6. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{27 - n^3} \right)$ (2 балла).
7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{\sin 5x - \sin 2x}$ (3 балла).
8. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (n+1)\sin n}{\sqrt{9n^4 + 5}}$ (3 балла).

Промежуточная контрольная работа 2 (пределы и непрерывность)

Вариант 1

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} + x - \sqrt{1-x+x^2})$;
4. Пусть $x \rightarrow \infty$. Определить порядок роста функции $y = \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$;
5. Исследовать на непрерывность и определить характер точек разрыва функции $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$

Вариант 2

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$; 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$;
4. Пусть $x \rightarrow 0$. Определить порядок малости функции $y = 2x - 3x^3 + x^5$.
5. Исследовать на непрерывность и определить характер точек разрыва функции $y = \frac{1}{\ln x}$

Вариант 3

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x}{1-x}}$; 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$;
4. Пусть $x \rightarrow 0$. Определить порядок малости функции $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$.
5. Исследовать на непрерывность и определить характер точек разрыва функции $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

Промежуточная контрольная работа 3 (производные)

Вариант 1

1. Составить уравнение нормали и касательной в точке с абсциссой x_0 .
 $y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2$
2. Вычислить производную $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x - 3x^2)$.
3. Вычислить производную $y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}$

4. Вычислить производную $y = \frac{\sqrt{(x+1)^5(x-2)^3}}{(x-4)^2}$

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = 1/\sqrt{x}$, $x = 4,16$.

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right). \end{cases}$$

6. Вычислить производную параметрически заданной функции

7. Построить график $y = x(12 - x^2)/8$

Вариант 2

1. Составить уравнение нормали и касательной в точке с абсциссой x_0 .

$$y = \frac{3x - x^2}{3}, x_0 = 1$$

2. Вычислить производную $y = \sqrt{1+2x} - \ln(x + \sqrt{1+2x})$.

3. Вычислить производную $y = (\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$

4. Вычислить производную $y = \frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{e^{x^3}}$

5. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$, $x = 1,97$.

6. Вычислить производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = 2t/(1+t^3) \\ y = t^2/(1+t^2) \end{cases}$

7. Построить график $y = (x+1)^2(x-1)^2$

Рейтинговая контрольная работа 2 (1 семестр)

Тема: производная

Вариант 1.

1. Найти производную y'_x

$$\begin{cases} x = (\arcsin t)^2 \\ y = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases} . \quad (2 \text{ балла}).$$

2. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0

$$y = 6\sqrt[3]{x} - \frac{16\sqrt[4]{x}}{3}, \quad x_0 = 1 \quad . \quad (3 \text{ балла}).$$

3. Вычислить с помощью дифференциала

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x = 1.58 \quad . \quad (3 \text{ балла}).$$

4. Найти производную $y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}$. (3 балла).

5. Найти формулу Тейлора для функции $y = \sin^2 x$ при $x_0 = 0$ до членов 2-го порядка включительно.

6. Вычислить предел с помощью правила Лопиталья или формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

7. Провести полное исследование функции и построить график $y = e^{-x^2}$.

Вариант 2.1. Найти производную y'_x

$$\begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t} \end{cases} \cdot (2 \text{ балла}).$$

2. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4}, \quad x_0 = 4 \quad . (3 \text{ балла}).$$

3. Вычислить с помощью дифференциала

$$y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1.97 \quad . (3 \text{ балла}).$$

4. Найти производную $y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$. (3 балла).5. Найти формулу Тейлора для функции $y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ до членов 2-го порядка включительно. .6. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя или формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ 7. Провести полное исследование функции и построить график $y = \frac{1}{1+x^2}$ **Вариант 3.**1. Найти производную y'_x

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln \frac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases} \cdot (2 \text{ балла}).$$

2. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0

$$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1 \quad . (3 \text{ балла}).$$

3. Вычислить с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0.01$. (3 балла).4. Найти производную $y = x^{\sin x^3}$. (3 балла).5. Найти формулу Тейлора для функции $y = \sqrt{x^3 + 1}$ при $x_0 = 2$ до членов 2-го порядка включительно. .6. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя или формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.7. Провести полное исследование функции и построить график $y = (3-x)e^{x-2}$.**Вариант 4.**1. Найти производную y'_x $\begin{cases} x = \ln(1-t^2) \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2} \end{cases} \cdot (2 \text{ балла}).$ 2. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0

$$y = 2x + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1 \quad . (3 \text{ балла}).$$

3. Вычислить с помощью дифференциала $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1.03$. (3 балла).4. Найти производную $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$. (3 балла).

5. Найти формулу Тейлора для функции $y = \arctg^2 x$ при $x_0 = 1$ до членов 2-го порядка включительно.
6. Вычислить предел с помощью правила Лопиталья или формулы Тейлора $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
7. Провести полное исследование функции и построить график $y = \ln\left(\frac{x}{x-3}\right) - 1$.

2 семестр

Промежуточная контрольная работа 1 (интегралы)

Вариант 1. 1. $\int (4-5x)e^{-3x} dx$. 2. $\int \sqrt{(x^2+2x+3)} dx$ 3. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$.

4. $\int \frac{dx}{1-x^3}$ 5. $\int \cos^3 x \cdot dx$ 6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ 7. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x + 4^x} dx$ 8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

Вариант 2. 1. $\int \arctg \sqrt{3x+1} dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$ 3. $\int \frac{dx}{1-x^4}$ 4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

5. $\int \frac{dx}{\sin x}$ 6. $\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$ 7. $\int x\sqrt{2+3x} dx$ 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt[5]{1+5x^2}}$

Вариант 3. 1. $\int (3x-6)\cos 3x dx$. 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$ 3. $\int x \ln x \cdot dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}} dx$ 5. $\int \frac{dx}{8x^3+1}$ 6. $\int \arccos x \cdot dx$ 7. $\int \sqrt{x^2-2x} dx$

8. $\int \sin x \sin 2x dx$

Рейтинговая контрольная работа 1 (2 семестр).

Тема: интегралы.

Вариант 1.

Найти интегралы: 1. $\int \arctg \sqrt{x-1} dx$ (2 балла); 2. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (2 балла);

3. $\int \frac{(x^3+2)dx}{(x^3-x^2)}$ (3 балла); 4. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$ (2 балла); 5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (2 балла).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$ и осью Ox (3 балла);

7. Найти длину дуги кривой: $y = chx + 5, 0 \leq x \leq 1$ (3 балла).

8. Вычислить объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x} \cdot e^x$, $y = 0$, $x = 1$ (3 балла).

Вариант 2.

Найти интегралы: 1. $\int x \sin^2 x dx$ (2 балла); 2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (2 балла);

3. $\int \frac{(x+2)dx}{(x^3-1)}$ (3 балла); 4. $\int \frac{dx}{\cos x}$ (2 балла). 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt[4]{x}}}$ (2 балла).

6. Вычислить площадь фигур, ограниченных кривыми: $\rho = 3 \cos \varphi$, $\rho = 5 \cos \varphi$ (3 балла).

7. Найти длину дуги кривой: $y = 3 + \ln \sin x, \pi/6 \leq x \leq \pi/4$ (3 балла).

8. Вычислить объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x} \cdot \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi)$ (3 балла).

Вариант 3.

Найти интегралы: 1. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$ (2 балла); 2. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^4+4}$ (2 балла);

3. $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x^3+x^2)}$ (3 балла); 4. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ (2 балла); 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ (2 балла).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x, y = e^{-x}, x = 2$ (3 балла).

7. Найти длину дуги кривой: $y = \ln \cos x, \pi/6 \leq x \leq \pi/3$ (3 балла).

8. Вычислить объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2, y^2 = x$ (3 балла).

Промежуточная контрольная работа 2 (функции нескольких переменных)

Вариант 1

1. Найти точки экстремума функции $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ и исследовать их характер

2. Найти производную функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ в точке $M(1,1,2)$ в направлении, образующем с осями координат углы $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

3. Найти дифференциал второго порядка от функции $z(x, y)$, заданной неявным образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. Разложить функцию $z = \sin(x^2 + y^2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0)$.

Вариант 2

1. Найти точки экстремума функции $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ и исследовать их характер.

2. Функцию $z = x^y$ разложить по степеням $(x-1), (y-1)$, найдя члены до третьего порядка включительно. Использовать результат для вычисления $1,1^{1,02}$.

3. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^2$.

4. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$ в точке $(1,1,2)$.

Вариант 3

1. Найти точки экстремума функции $z = xy + x^2 + y^2 + x - y + 1$ и исследовать их характер.

2. Найти дифференциал dz функции $z(x, y)$, заданной неявно: $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$

3. Написать уравнение касательной прямой к линии $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \sin \frac{t}{2}$ в точке $(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$.

4. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt{0.99} - 1)$.

Рейтинговая контрольная работа 2 (2 семестр).

Тема: функции многих переменных.

Вариант №1

1. (2 балла) Найти частную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ для функции $f(x, y) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+1}\right)$.
2. (2 балла) Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x + y^2z = 5$ в точке (1,2,1).
3. (2 балла) Найти производную функции $f(x, y, z) = y^2 + e^{x-y} + e^{z-2x}$ в точке (1,1,2) по направлению $\vec{v} = (1, -2, 2)$.
4. (3 балла) Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = 3x - 2xy + y^2 - 2x - 2y$.
5. (3 балла) Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
6. (3 балла) Найти экстремум функции xy^2z^3 при условии $x + 2y + 3z = 0$ ($x > 0, y > 0, z > 0$)
7. (3 балла) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.
8. (2 балла) Функцию $x^2 + y^3 - x^2y + x + y - 1$ разложить по формуле Тейлора с нулевым остаточным членом в окрестности точки (1,2).

Вариант №2

1. (2 балла) Найти частную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ для функции $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y} + y^2\right)$.
2. (2 балла) Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x^3 + y^2 + z = 7$ в точке (1,2,2).
3. (2 балла) Найти производную функции $f(x, y, z) = \sin(x + y) + e^{x+y}$ в точке (0,0,0) по направлению $v = (-1, 1, 1)$.
4. (3 балла) Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = 5x + 2y + x^2 - 2xy + 3y^2$.
5. (3 балла) Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$
6. (3 балла) Найти экстремум функции $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $x + y - 3 = 0$
7. (3 балла) Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x + y + z = e^z$.
8. (2 балла) Функцию $y^2 + x^3 - x^2y + x + 2y - 4$ разложить по формуле Тейлора с нулевым остаточным членом в окрестности точки (1,1).

Рейтинговая контрольная работа 3 (2 семестр)

Тема: ряды

Вариант 1.

1. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n+1}}$.
2. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.
3. (3 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n (n+1)!}$.
4. (2 балла). Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

5. (2 балла). Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n$.

6. (2 балла). Разложить в ряд Тейлора по степеням x $\ln(1-x-6x^2)$.

7. (2 балла). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

Вариант 2.

1. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^5+1}}$.

2. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. (3 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

4. (2 балла). Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

5. (2 балла). Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} (x-2)^n$.

6. (2 балла). Разложить в ряд Тейлора по степеням x $\frac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$.

7. (2 балла). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)x^{n-1}$.

Вариант 3.

1. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n^2+1}}$.

2. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+1}\right)$.

3. (3 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n!)^2}$.

4. (2 балла). Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$.

5. (2 балла). Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+8} (x-5)^n$.

6. (2 балла). Разложить в ряд Тейлора по степеням x $\frac{9}{20-x-x^2}$.

7. (2 балла). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Вариант 4.

1. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{2n^7+3n^5+10}$.

2. (2 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$.

3. (3 балла). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

4. (2 балла). Исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{2n+3}}$.
5. (2 балла). Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^n$.
6. (2 балла). Разложить в ряд Тейлора по степеням x $(3+e^{-x})^2$.
7. (2 балла). Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n+4)x^{n-1}$.

Промежуточная контрольная работа 3 (ряды Фурье)

1. Разложить в ряд Фурье функцию, равную -1 в интервале $(-\pi, 0)$ и 1 в интервале $(0, \pi)$.
2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$.
3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$.
4. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
5. Разложить в ряд Фурье функцию $y = x^2$ в интервале $(0, 2\pi)$.
6. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $y = x^2$ в интервале $(0, \pi)$.
7. Разложить в ряд Фурье функцию $y = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
8. Разложить в ряд Фурье функцию, равную 1 в интервале $(-\pi, 0)$ и 3 в интервале $(0, \pi)$.

Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу

1. Рациональные числа, иррациональные числа, действительные числа. Сравнение, операции, геометрическая интерпретация
2. Понятие комплексного числа. Различные формы записи. Арифметические операции над комплексными числами, возведение в степень и извлечение корня.
3. Верхняя и нижняя грани числового множества. Точная грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней граней. Теорема об отделимости числовых множеств.
3. Понятие числовой последовательности. Монотонные и ограниченные последовательности. Определение предела последовательности, сходящейся последовательности. Примеры.
4. Свойства сходящихся последовательностей: единственность предела, ограниченность.
5. Свойства пределов последовательностей (о "зажатой" последовательности, свойства, связанные с неравенствами и алгебраическими операциями).
6. Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности и их свойства. Примеры.
7. Теорема о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число "e".
8. Принцип вложенных отрезков (теорема Кантора).
9. Подпоследовательности. Теорема Больцано - Вейерштрасса.
10. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности и утверждения о них. Примеры.

11. Определение фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
12. Понятие функции. График, область определения и область значений, четные, нечетные, ограниченные функции, алгебраические операции, сложные функции. Элементарные функции. Примеры.
13. Предел функции в точке. Эквивалентность определений по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.
14. Свойства предела функции в точке (свойства, связанные с арифметическими операциями, локальные свойства).
15. Свойства пределов функций в точке: свойства, связанные с неравенствами. Правило замены переменной для пределов функций.
16. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и теоремы о них. Примеры.
17. Первый замечательный предел и его следствия.
18. Второй замечательный предел и его следствия.
19. Критерий Коши существования предела функции. Теорема о пределе монотонной функции.
20. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Порядок бесконечно малой функции. o - и O - символика. Свойства o -.
21. Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
22. Непрерывность функции в точке (различные формулы записи определения: по Коши и Гейне, с помощью приращений), непрерывность слева и справа. Локальные свойства непрерывной функции.
23. Свойства непрерывных в точке функций, связанные с арифметическими операциями. Непрерывность сложной функции.
24. Точки разрыва (определение, классификация точек разрыва). Примеры.
25. Непрерывность функции на отрезке. Теорема Вейерштрасса 1 (об ограниченности непрерывной на отрезке функции).
26. Теорема Вейерштрасса 2 (о достижимости точных граней непрерывной на отрезке функцией).
27. Теоремы Коши о нулях и промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций.
28. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции. Примеры.
29. Понятие производной функции в точке, необходимое условие существования производной. Односторонние производные, бесконечные производные. Примеры. Геометрический смысл производной.
30. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

31. Производные основных элементарных функций.
32. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции, теорема о связи дифференцируемости и производной в точке, геометрический смысл дифференциала

Вопросы к экзаменам

1 семестр

1. Рациональные числа, иррациональные числа, действительные числа. Сравнение, операции, геометрическая интерпретация
2. Понятие комплексного числа. Различные формы записи. Арифметические операции над комплексными числами, возведение в степень и извлечение корня.
3. Верхняя и нижняя грани числового множества. Точная грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней граней. Теорема об отделимости числовых множеств.
4. Понятие числовой последовательности. Монотонные и ограниченные последовательности. Определение предела последовательности, сходящейся последовательности. Примеры. Свойства сходящихся последовательностей: единственность предела, ограниченность.
5. Свойства пределов последовательностей (о "зажатой" последовательности, свойства, связанные с неравенствами и алгебраическими операциями).
6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Примеры.
7. Теорема о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число "e".
8. Принцип вложенных отрезков (теорема Кантора).
9. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
10. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности и утверждения о них. Примеры.
11. Определение фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.
12. Понятие функции. График, область определения и область значений, четные, нечетные, ограниченные функции, алгебраические операции, сложные функции. Элементарные функции. Предел функции в точке. Эквивалентность определений по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.
13. Свойства предела функции в точке (свойства, связанные с арифметическими операциями, локальные свойства).
14. Свойства пределов функций в точке: свойства, связанные с неравенствами. Правило замены переменной для пределов функций.
15. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и теоремы о них. Примеры.
16. Первый замечательный предел и его следствия.
17. Второй замечательный предел и его следствия.

18. Критерий Коши существования предела функции. Теорема о пределе монотонной функции.
19. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Порядок бесконечно малой функции. o - и O - символика. Применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
20. Непрерывность функции в точке (различные формулы записи определения: по Коши и Гейне, с помощью приращений), непрерывность слева и справа. Локальные свойства непрерывной функции.
21. Свойства непрерывных в точке функций, связанные с арифметическими операциями. Непрерывность сложной функции.
22. Точки разрыва (определение, классификация точек разрыва). Примеры.
23. Непрерывность функции на отрезке. Теоремы Вейерштрасса 1, 2 о свойствах функции, непрерывной на отрезке.
24. Теоремы Коши о нулях и промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций.
25. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции. Примеры.
26. Понятие производной функции в точке, необходимое условие существования производной.
27. Односторонние производные, бесконечные производные. Примеры. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции.
28. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями. Производная сложной функции.
29. Производная обратной функции, производная функции, заданной параметрически и неявно. Таблица производных элементарных функций.
30. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал функции, теорема о связи дифференцируемости и производной в точке, геометрический смысл дифференциала.
31. Производные высших порядков. Таблица n -ых производных. Формула Лейбница. Производные высших порядков для функции, заданной параметрически.
32. Дифференциал n -ого порядка. Инвариантность 1-ого дифференциала и неинвариантность дифференциала порядка $n \geq 2$.
33. Локальный экстремум (определение) и теорема Ферма. Теорема Ролля о нулях производной.
34. Теорема Лагранжа и её следствия (с док-вом). Формула конечных приращений Лагранжа.
35. Теорема Коши о двух дифференцируемых функциях, обобщённая формула конечных приращений.
36. Правило Лопиталья. Примеры вычисления пределов с помощью правила Лопиталья.
37. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Примеры.

38. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формулы Маклорена для простейших элементарных функций. Примеры.
39. Условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции (теоремы 1-3).
40. Локальный экстремум (определение). Достаточное условие локального экстремума (теоремы 1-3).
41. Выпуклость вверх (вниз) графика функции. Достаточное условие выпуклости.
42. Точки перегиба. Необходимое условие наличия точки перегиба. Достаточное условие точки перегиба.
43. Асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные). Теорема о наклонной асимптоте.
44. Первообразные и их свойства. Понятие неопределённого интеграла, подынтегральной функции, подынтегрального выражения. Свойства неопределённого интеграла (свойства 1-3).
45. Свойства неопределённого интеграла: замена переменной и интегрирование по частям .46. Формула интегрирования по частям, три типа примеров интегрирования по частям.
47. Таблица интегралов. Примеры вычисления простейших интегралов.
48. Алгебраические многочлены и разложение многочленов на множители. Разложение рациональной функции в сумму простейших.
49. Интегрирование рациональных функций. Методы нахождения неопределённых коэффициентов.
50. Интегрирование тригонометрических выражений.
51. Интегрирование иррациональных выражений.

2 семестр

1. Определённый интеграл Римана. Основные определения. Необходимое условие интегрируемости. Суммы Дарбу и их свойства. Условие интегрируемости.
2. Критерий интегрируемости функций. Классы интегрируемых функций. Свойства интеграла, связанные с операциями над функциями.
3. Свойства интеграла, связанные с отрезками интегрирования и неравенствами. Оценки интервалов.
4. Теоремы о среднем.
5. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по верхнему пределу.
6. Теорема (формула) Ньютона-Лейбница.
7. Теорема о замене переменной в определённом интеграле, формула интегрирования по частям в определённом интеграле.
8. Площадь фигуры на плоскости (клеточные фигуры, квадратуемые фигуры, мера). Площадь криволинейной трапеции, криволинейного сектора, площадь фигуры с параметрически заданной границей.

9. Объём тела (клеточное тело, кубируемое тело, мера). Объём цилиндрического тела, объём тела с заданными площадями сечений, объём тела вращения.
10. Длина кривой (определение спрямляемой кривой, длины кривой, теорема о длине, формулы длины для разных случаев задания кривой).
11. Площадь поверхности вращения (определение, теорема). Теорема Гульдена. Физические приложения определённых интегралов.
12. Несобственные интегралы первого рода (определение; свойства, включая интегрирование по частям и формулу Ньютона-Лейбница).
13. Несобственные интегралы второго рода (определение и свойства, включая интегрирование по частям и формулу Ньютона-Лейбница).
14. Условие сходимости несобственных интегралов. Несобственные интегралы от неотрицательных функций - признаки сходимости.
15. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
16. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов (определение, теорема).
17. Метрическое пространство (определение, сходящиеся и фундаментальные последовательности, открытые и замкнутые множества, компакт, пространство R^n).
18. Функции многих переменных. Предел функции в точке, предел по множеству, по направлению.
19. Непрерывность функции многих переменных в точке. Свойства непрерывных функций. Свойства функций, непрерывных на компакте, на связном множестве.
20. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал. Теоремы о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции многих переменных.
21. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы 1-го дифференциала. Правила дифференцирования.
22. Геометрический смысл 1-го дифференциала. Касательные плоскость и нормаль. Производная по направлению. Градиент.
23. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
24. Дифференциалы высших порядков (определение, формы записи, неинвариантность 2-го и высших дифференциалов).
25. Формула Тейлора для функции многих переменных.
26. Теорема о неявной функции.
27. Дифференцируемое отображение. Якобиан и его свойства. Системы функций, заданных неявно - теорема. Якобиан и зависимость - независимость функций.
28. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые условия экстремума.
29. Достаточные условия экстремума функции многих переменных. Проверка экстремума для функции двух переменных.

30. Условный экстремум: прямой метод, метод Лагранжа.
31. Числовые ряды (понятие ряда, сходимость, частичная сумма, сумма). Необходимый признак сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши.
32. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: через частичные суммы, интегральный признак.
33. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения и его следствия.
34. Признаки Даламбера и Коши сходимости ряда.
35. Знакопередающийся ряд. Признак сходимости Лейбница, следствие.
36. Абсолютная и условная сходимость ряда (определение, свойства абсолютно сходящихся рядов). Примеры исследования сходимости ряда. Признаки Абеля и Дирихле.
37. Функциональные последовательности и ряды: сходимость, равномерная сходимость, связь утверждений о функциональных последовательностях и рядах.
38. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса.
39. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов - непрерывность предельной функции и суммы ряда.
40. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов: почленная дифференцируемость и интегрируемость.
41. Степенные ряды. Теорема Абеля, радиус сходимости, круг (интервал) сходимости, формула Коши-Адамара.
42. Формула Даламбера для радиуса сходимости степенного ряда. Теорема о почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда. Аналитическая функция, единственность коэффициентов.
43. Ряд Тейлора. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора. Ряды Маклорена для элементарных функций.
44. Ортогональная система функций. Ряды Фурье. Тригонометрический ряд Фурье, формулы для коэффициентов. (Ряды Фурье для чётных и нечётных функций).
45. Признак Дини сходимости ряда Фурье и его следствия (лемма Римана, ядро Дирихле, формула Дирихле для частичных сумм).
46. Признак Дирихле сходимости ряда Фурье. Простейшие условия равномерной сходимости ряда Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.

12. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

12.1. Основная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2008 ч.1 -300экз.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2006, ч.2. – 140экз.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие/ Г.Н. Берман. -22-е изд., перераб. -СПб.: Профессия, 2007.-432 с. 250 экз.
4. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. СПб.: «Лань», 2005г- 400экз.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2006 т.1.- 65экз
6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2006, т.2. -70экз
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ Астрель, 2007 г. – 300экз. - 13-е изд., испр. - М. : Сервисная компания, 2014. - 624 с. - 50 экз.

12.2. Дополнительная литература

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М: Наука, 2002- 50экз.
2. Сборник задач по теории функций комплексного переменного (под ред. Буланова А.П.), Обнинск: ИАТЭ, 2005г – 300экз
3. А. П. Буланов, Конспект лекций по курсу «Математический анализ», Обнинск: ИАТЭ, 1991 г.
4. А.П. Буланов, Конспект лекций по курсу «Высшая математика (раздел «Дифференциальное исчисление функций одного переменного»)», Обнинск: ИАТЭ, 1994 г.
5. Л.А. Королева, Неопределенный интеграл. Учебное пособие по курсу “Математический анализ”, Обнинск: ИАТЭ, 2003г.
6. А.В. Нестеров, Функции нескольких вещественных переменных. Методическое пособие и варианты индивидуальных домашних заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Математический анализ», Обнинск: ИАТЭ, 1997 г.
7. А.В. Нестеров. О.Ю. Аристов, Числовые и функциональные ряды. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов по курсу «Математический анализ», Обнинск: ИАТЭ, 1997 г.
8. Н.И. Кузьменко, А.М. Юрченко. Пределы последовательностей и функций. Непрерывность. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов по курсу «Математический анализ», Обнинск: ИАТЭ, 1995 г.
9. В.И. Смирнов, Курс высшей математики. Т.1 –М.:Наука, 1967; Т.2 – М.:Наука, 1967; Т.3 – М.:Наука, 1969
10. И. Архипов Лекции по математическому анализу. – М.:Высшая школа, 2000.

13. Краткий терминологический словарь

Представляет собой либо словарь терминов с их определениями объемом до трех-пяти страниц, либо упорядоченный по алфавиту перечень ключевых слов и понятий учебной дисциплины.

Асимптота, бесконечно большая величина, бесконечно малая величина, верхняя (нижняя) грань множества, градиент функции, график функции, дифференциал, дифференциальный бином, граница множества, инвариантность, индукция математическая, интеграл (несобственный, сходящийся, неопределенный, определенный), интеграл Дарбу, интегральная сумма, иррациональное число, касательная прямая и плоскость, квадратуемые и кубуемые множества, компакт, кривая (гладкая, спрямляемая, кусочно-гладкая), кривизна, монотонность функции и последовательности, непрерывность, норма, нормаль, область (определения функции), окрестность (проколотая), оператор, остаток ряда, отображение, первообразная, последовательность и подпоследовательность, предел, производная, полином, поле (действительных, комплексных) чисел, признак (сходимости, сравнения), принцип вложенных отрезков, прообраз, равномерная непрерывность, радиус сходимости, разрыв (устранимый, неустранимый), ряд, сумма ряда, сумма Дарбу, точка (максимума, минимума, экстремума, разрыва), функция, экстремум

14. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Библиотечный фонд института.

15. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины «Математический анализ»

Курс «Математического анализа» является фундаментом математического образования инженера-математика и имеет важнейшее значение для успешного изучения всех последующих математических дисциплин, предусмотренных учебным планом. Для изучения математического анализа требуется качественное знание школьного курса алгебры, геометрии, тригонометрии, начал анализа, поэтому на первых занятиях студентам даются задачи на повторение школьного курса математики (графики и свойства элементарных функций). Образовательные технологии, применяемые при изучении дисциплины в аудитории (активные и интерактивные формы): лекции, семинары, консультации, индивидуальные работы, контрольные работы, зачет, в том числе активные формы: проблемная лекция, лекция по готовому конспекту, мозговой штурм, решение типовых задач, занятия по решению проблемных и творческих задач, контрольно-корректирующие занятия. Зачет выставляется после защиты индивидуальных домашних заданий и сдачи контрольных работ.

Образовательные технологии, применяемые при организации внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа с книгой и конспектом лекций.
2. Самостоятельная работа с Internet-ресурсами.
3. Самостоятельная работа по выполнению домашних работ.
4. Самостоятельная работа при подготовке к контрольным аудиторным работам.
5. Самостоятельная работа при подготовке к коллоквиуму и экзамену.

Для достаточного освоения теоретического материала по

дисциплине «Математический анализ» студенты должны:

- ознакомиться с перечнем вопросов, указанных в теме и изучить их по конспекту лекций с учетом пометок в конспекте;
- выбрать источник из списка литературы, если по данной теме недостаточно материала в конспекте лекций;
- проверить полученные теоретические знания с помощью промежуточных контрольных работ и коллоквиума.